京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	ソリトンの問題とその周辺(厳密解を中心とする非線型波動と関連する諸問題,研究会報告)
Author(s)	戸田, 盛和
Citation	物性研究 (1983), 40(2): 242-247
Issue Date	1983-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/90945
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

関関数の計算等）は，未解決といってよいであろう。佐藤，三輪，神保，McCoy, Wu 等は，相関関数がみたす非線形方程式を求めている。もちろん，量子逆散乱法を使って相関関数を求めることができ，その仕事も始まっている。

完全積分可能系の性質が明らかにされるとともに，解けない系の取扱いにも目を向けるべき段階にきていると思う。完全積分可能系もカオス系もある意味では極端な場合を考察しているわけで，その両者の対比から新しい発展が生まれるかもしれないと感じている。

文　献

1) 和達三樹：日本物理学会誌第36巻第11号（1981）786.
2) M. Wadati and M. Toda; J. Phys. Soc. Jpn. **32** (1972) 1403.
3) L. D. Faddeev; Sov. Sci. Rev. (1980) 107.
4) H. B. Thacker; Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.
5) K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati; Progr. Theor. Phys. **66** (1981) 1284.
6) A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov; Ann. Phys. **120** (1979) 253.
7) M. Uchinami, K. Sogo, Y. Akutsu and M. Wadati; preprint.
8) L. A. Takhtadyan and L. D. Faddeev; Russian Math. Surveys **34** (1979) 11.
9) A. B. Zamolodchikov; Commun. Math. Phys. **69** (1979) 165.
10) K. Sogo and M. Wadati; preprint.

ソリトンの問題とその周辺

横浜国大・工　　戸　田　盛　和

1. 線形と非線型の間

1960年からと記憶するが，格子振動の研究グループが発足し，基研で毎年研究会をおこなった。その主なテーマは不純物を含む格子の問題で，格子振動と結晶の電子状態が相似していること，格子の振動スペクトルと電子の準位密度が同様に論じられることが，その背景にあった。少数不純物による局在振動，無秩序な配列の２元合金のスペクトル，重い不純物のブラウン運動，不純物を含む格子のエネルギー流などが論じられた。

無秩序配列の，１次元の２次元合金に対する計算機による厳密な扱いが，P. Dean らによって発表されたのは1960年である。この結果によれば，振動スペクトルの acoustic branch は配列の無秩序化によってあまり大きな影響は受けないが，optical branch は大きく変化して多数のするどい山ができ，山と山の間に振動数密度が完全に０になる点が出現する（その様子は原子の質量比によって異なる）。このようなするどいスペクトルは当時多くの人によって試みられていた摂動論的な取扱いでは導かれないものである。そのため，この問題は厳密に扱わなければならいことが明かになり，新たな研究目標が生れたのであった。計算機による結果が予期しない事実を明かにした例は，後のソリトンの発見を含めて今迄に何回か経験しているが，この場合も大変大きなショックを与えられたのであった。H. Matsuda は計算機によるショック以前をＢ．Ｃ．(before computer) と呼び，これに対し Dean の論文以後をＡ．Ｄ．(after Dean) と呼んで，研究方向のはっきりした変化を表現している。１次元無秩序２次元合金のスペクトルの特徴は Matsuda と J. Hori によって厳密な理論として把えられた。その他，この研究グループの成界の多くは Prog. Theor. Phys. Suppl. **23** (1962), **36** (1966), **45** (1970) などに収められている。

一様な格子において原子の一つを軽い同位体でおきかえるとスペクトル帯の上に準位をもつ局在振動が生じる。無秩序２元合金のするどいスペクトルの山は重い原子にはさまれた軽い原子の島によって生じる局在振動に類するものと解釈されるが，その固有振動の波自身も低モードを除き，ほとんどすべての波が局在していることが示されている。これは２次元，３次元でも同様である。固有振動の局在性のため，無秩序格子を伝わるエネルギーの流れは著しく阻害される。

不純物の質量を小さくする代りに，相互作用（力の定数）を強めても局在振動は発生する。１次元格子の場合には，軽い同位体を入れた格子と，この同位体と同数の力の定数を変えた格子とは，スペクトルに対応関係がつけられ，その意味で双対性がある。この双対変換は非線形格子にも適用され，これを手がかりにして指数型相互作用をもつ積分可能な格子が発見された（1967年）。

[Remark]　積分可能な指数格子は双対性の変換式を用いて発見した。しかし，この格子が定式化されたあとでは双対性は必ずしも必要なものではなくなった。発見の契機というものはこのような場合が多いのではなかろうか。

格子によるエネルギーの伝達を阻害する三つの機構が考えられる。これらは不純物と非線形性と種々の格子欠陥である。この中で非線形性は場合によって，むしろエネルギー伝達を強めることがあることが Visscher らの計算機実験で明らかにされたが，これはソリトンが不純物などを乗り越えて進むためと思われる。格子欠陥の影響は厳密な扱いがむつかしいであろう。

不純物の影響と非線形性の影響は全くちがう面と，何か似た面とがあり，これは非線形格子にとり組む以前から気になっていたことであるが，今でもひっかかるところがある。不純物を多数入れた無秩序格子では固有振動はほとんどすべてが局在化している。これに対し非線形格子ではソリトンは局在したパルスであるし，周期的なcnoidal波もするどい山をもち得る。局在化という点で不純物と非線形性とは何か共通するものがあるのである。

軽い不純物1個による局在振動は（1次元線形格子の場合），スペクトル帯より高い振動数をもつが，波長は最小で格子間隔の2倍である。これに対し格子 cnoidal 波で波長を無限大とした極限でソリトンを導くことができる。この点では，局在振動が最小波長によることと，ソリトンが無限大波長によることとは対照的である。なお，線形波動は不純物のないとき，

$$u = A \exp \mathrm{i} \left(\frac{2\pi n}{\lambda} - \omega t \right), \quad \omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin \frac{\pi}{\lambda}$$

で与えられるが，ここで

$$1/\lambda = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\alpha \ (\alpha\ \text{実数})$$

とおくと，

$$u = A(-1)^n \exp(-2\pi\alpha n) \exp(-\mathrm{i}\,\omega t), \quad \omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \cosh(\alpha\pi)$$

となり，これは $n > 0$ に対する局在振動とそのスペクトルを与える。他方で線形の波

$$u \propto \exp \mathrm{i} (kn - \omega t)$$

に対してソリトンは

$$(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2) \log(1 + \exp(kn - \omega t))$$

で与えられ，線形の場合の虚数 $\mathrm{i}(kn - \omega k)$ に対して，非線形格子では実数 $kn - \omega t$ が対応しているように見ることができる。

これらの事実はたがいにあまり関聯がはっきりしないことの寄せ集めであるように思われるかもしれないが，何かの発見の契機になるものを含んでいるものであるような気がしてならない。線形と非線形を含めて，解の変数を複素数に広げて眺めれば，新しい視野が広ける可能性があるかも知れないと思うのである。

2. 不純物と局在振動

軽い不純物1個が入った1次元の線形格子には1つの局在振動が生じる。1次元の非線形格子に1個の軽い不純物を入れたとき，局在振動は生じるであろうか。

線形に近い場合は局在振動に似たものが生じるであろう。しかし非線形性が強い極限として剛体球系が考えられるが，剛体球系では軽い不純物剛体球を入れたとき，局在する運動は存在し得ない。したがって一般的にいえば，非線形格子では不純物1個による厳密な意味での局在振動はあり得ないと思われる。

しかし軽い不純物を1個入れた非線形格子に対する数値計算，および LC 回路による実験によれば，極めてはっきりした局在振動が存在し得るように思われる。上の予想とはちがった事実が導かれたわけで，この問題の解決は大変興味のあることである。局在振動が存在すると仮定すれば，非線形摂動的な計算は実行でき，これが数値計算や LC 回路による結果とよく合うことが知られている。この場合局在振動の振動数は振幅に関係するが，これは振動のために非線形格子は熱膨張をするためである。

ソリトンが軽い不純物を通過するときや重い不純物で反射透過する様子も数値計算，LC 回路，摂動論によって扱われている。

軽い不純物を外力でゆすったときの共鳴現象は横浜国大の研究室で調べられた。1自由度の非線形振動子の強制振動に対する Duffing の式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax + bx^3 = f_0 \sin\omega t$$

では共鳴振動数が振幅によって変わるため，外力の周波数ωを変えると，ヒステリシス現象（およびジャンプ現象）が起こる。1次元非線形格子に軽い不純物を1個入れてこれをゆすると局在振動のところでヒステリシス，ジャンプ現象が見られる。これも数値計算，LC 回路，摂動論によって解明された。

3. 可積分領域における格子・連続体変換

積分不可能な領域を通らずに積分可能のままでで格子から連続体へ変換する方法が見出された（N. Saitoh 1980）。

指数格子を（双対格子の形で）

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+f_n) = f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n$$

とする。ここで変換

$$t=\frac{\tau}{h^3}\quad(0<h\leq 1)$$

$$f_n=h^2u_n(\tau)=h^2u(x,\tau)$$

$$x=hn-(\frac{1}{h^2}-h^2)\tau$$

をおこなう。$h\fallingdotseq 0$ でこの変換をおこなっても $u(x,\tau)$ は可積分であることは変わらない。そして $h=0+$ においては上の運動方程式は KdV 方程式

$$u_\tau+\frac{1}{2}uu_x+\frac{1}{24}u_{xxx}=0$$

を与える。

例えばソリトンは

$$u(x,\tau)=(\frac{\sinh\kappa h}{h})^2\operatorname{sech}^2\left\{\kappa x+\frac{\kappa(1-h^4)\mp\frac{\sinh\kappa h}{h}}{h^2}\tau\right\}$$

である。複号∓は右と左へ進むソリトンを与えるが，$h\to 0+$ の極限ではソリトンのスピードは

$$-\frac{(1-h^4)\kappa\mp\frac{\sinh\kappa h}{h}}{h^2\kappa}\to\begin{cases}+\dfrac{\kappa^2}{6} & (\text{右へ進むソリトン})\\ -\infty & (\text{左へ進むソリトン})\end{cases}$$

となる。格子では左右へ対称に進むことができたソリトンが KdV の極限では右へ進むものだけになるトリックはこの変換で簡単になしとげられるわけである。

この変換は x,τ あるいは n,t 面における1種の斜交軸変換である。 そして同種の変換は不連続系とそれにつながる連続系の間で広く用い得るものである。

4. 不連続時間

指数格子の運動方程式は

$$2e^{-r_n}-e^{-r_{n-1}}-e^{-r_{n+1}}=\frac{d^2r_n}{dt^2}$$

と書ける。ここで

$$e^{-r_n}-1=\frac{d^2}{dt^2}S_n,\qquad S_n=\log\psi_n(t)$$

とおくと運動方程式は

$$\frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2}-1=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\log\psi_n$$

となる。ここで

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\log\psi_n=\lim_{\tau\to 0}\frac{\psi_n(t+\tau)\psi_n(t-\tau)-\psi_n(t)^2}{\tau^2\psi_n(t)^2}$$

に着目すると，時間を不連続化した方程式として

$$\frac{\psi_{n-1}(t)\psi_{n+1}(t)-\psi_n(t)^2}{\psi_n(t)^2}=\frac{\psi_n(t+\tau)\psi_n(t-\tau)-\psi_n(t)^2}{\tau^2\psi_n(t)^2}$$

を考えるのが適当であると考えられる。この式は bilinear form を用いて，R. Hirota が導いている式でもある。この時間不連続格子はNソリトン解をもつ。このことから多変数 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N)$ の関数 $\psi[\eta]$ に対して，偏微分差分方程式

$$\frac{\varphi[\eta+\kappa h]\varphi[\eta-\kappa h]-\varphi[\eta]^2}{h^2\varphi[\eta]^2}$$

$$=\sum_{j,k=1}^{N}E_{jk}[\kappa]\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial\eta_k}\log\varphi[\eta]$$

が考えられる。この解として h と異なるパラメタ τ をもつ解があり，$\{\kappa\}$ と

$$\frac{\sinh\kappa_j h}{h}=\frac{\sinh\omega_j\tau}{\tau}\quad(j=1, 2, \cdots, N)$$

によって結びつけられる $\{\omega\}$ を用いれば

$$\frac{\varphi[\eta+\kappa h]\varphi[\eta-\kappa h]-\varphi[\eta]^2}{h^2\varphi[\eta]^2}$$

$$=\frac{\varphi[\eta+\omega t]\varphi[\eta-\omega t]-\varphi[\eta]^2}{\tau^2\varphi[\eta]^2}$$

が成立する。したがってこれは不連続時間非線形格子のNソリトン解であることが確かめられた。

（以上）